

PARAGRAAF 9.1 : TWEE SOORTEN GROEI

LES 1 LINEAIRE EN EXPONENTIELE GROEI

DEFINITIE LIJN = LINEAIRE GROEI

- Algemene formule van een lijn : $y = ax + b$

a = hellingsgetal = RC

b = beginwaarde (0,b) (snijpunt y-as)

- Lijnen gebruik je als :
 - Iedere keer hetzelfde getal erbij komt / eraf gaat (+5 / -3).

DEFINITIE EXPONENTIËLE FUNCTIES

- Algemene formule : $N = b \cdot g^t$ waarbij

b = beginhoeveelheid t = tijd

g = groeifactor

- Exponentiële functies gebruik je als :
 - Iedere keer met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt ($\times 3$)
 - Iedere keer hetzelfde percentage erbij komt of eraf gaat.
(Iedere keer + 3% $\rightarrow$ Iedere keer vermenigvuldigen met 1,03)

VOORBEELD 1

Op 1 jan 2003 zet Harrie 500 euro op de bank. Hij krijgt 6% rente per jaar.

- a. Is dit lineair of exponentieel ? Waarom ?
- b. Bepaal de formule en bereken daarmee het bedrag na 5 jaar.
- c. Bereken in welk jaar het bedrag voor het eerst meer dan verdubbeld is.

Jan zet op 1 jan 2003 700 euro op de bank. Hij krijgt €50 rente per jaar

- d. Stel de formule van Jan op
- e. Bereken in welk jaar het bedrag van Harrie groter is dan dat van Jan.

OPLOSSING 1

- a. Exponentieel, iedere keer +6% $\rightarrow \times 1,06$.
- b. $N = 500 \cdot 1,06^t$.
- c. $N(5) = 500 \cdot 1,06^5 = 669,11$ (euro's dus 2 decimalen)
- d. $1000 = 500 \cdot 1,06^t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1,06^t$ en $Y2 = 1000$

(2) Intersect

(3) $x = 11,9 = 12$ jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in $2003 + 12 = 2015$

- e. Nu komt er iedere keer een vast bedrag bij (+50). Dus nu een lineaire formule :
 $y = 700 + 50t$

f. Harrie > Jan $\rightarrow 500 \cdot 1,06^t > 700 + 50t$

Eerst oplossen $500 \cdot 1,06^t = 700 + 50t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1,06^x$ en $Y2 = 700 + 50x$

(2) Intersect

(3) $x = 21,97 = 22$ jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in $2003 + 22 = 2025$

EXTRA:

- procentuele toename = $(\text{nieuw} - \text{oud}) / \text{oud} \times 100\%$

LES 2 LINEAIRE EN EXPONENTIËLE FORMULES**VOORBEELD 1**

Gegeven is de volgende tabel over het aantal inwoners van dorp A :

t	0	1	2	3
y	800	1296	2100	3402

Met t in jaren en y is het aantal inwoners en $t = 0$ is het jaar 2000.

- Toon aan dat dit een exponentiële formule is.
- Bepaal de formule.
- Bereken in welk jaar er voor het eerst meer dan 10000 inwoners bijkomen.

In dorp B wonen in het jaar 2000 in totaal 8000 mensen. Ieder jaar komen er 1000 inwoners bij.

- Bereken in welk jaar het aantal inwoners in stad A en B gelijk zijn.

OPLOSSING 1

- a. Ze moeten (afgerond) allemaal gelijk zijn :

$$\frac{1296}{800} = 1,62 \quad \frac{2100}{1296} = 1,62 \quad \frac{3402}{2100} = 1,62$$

Ze zijn gelijk dus exponentieel met $g = 1,62$

b. $y = 800 \cdot 1,62^t$

- c. Gebruik de tabel !!!

(1) $Y1 = 800 \cdot 1,62^t$

(2) X	Y1	
6	14460	
7	23426	(+ 8966)
8	37950	(+ 14524)

Dus in het 7^e jaar → dus in 2007

d. $y = 1000t + 8000$

Eerst oplossen :

$$1000t + 8000 = 800 \cdot 1,62^t$$

(1) $Y1 = 1000t + 8000$ en $Y2 = 800 \cdot 1,62^t$

(2) Intersect

(3) $x = 5,92$

Dus in het 5^e jaar (inwoners komen iedere dag erbij !!!!)

Dus in het jaar = $2000 + 5 = 2005$

PARAGRAAF 9.2 EXPONENTIËLE GROEIFORMULES

LES 1 GROEIFACTOR

VOORBEELD 1

Een bacterie groeit met 12 % per dag. Bereken de groeifactor en het groeipercentage per

- a. 2 dagen
- b. week
- c. halve dag
- d. uur

OPLOSSING 1

$$100 + 12 = 112 \quad \rightarrow \quad 112/100 = 1,12$$

Groeifactor per dag 1,12

a. $g = 1,12$

$$g_{2\text{dagen}} = g^2 = 1,12^2 = 1,2544$$

$$\text{Groeipercentage} = 125,44 - 100 = 25,44\%$$

b. $g = 1,12$

$$g_{\text{week}} = g_{7\text{dagen}} = g^7 = 1,12^7 = 2,2107$$

$$\text{Groeipercentage} = 221,07 - 100 = 121,07\%$$

c. $g = 1,12$

$$g_{\frac{1}{2}\text{dag}} = g^{\frac{1}{2}} = 1,12^{\frac{1}{2}} = 1,0583$$

$$\text{Groeipercentage} = 105,83 - 100 = 5,83\%$$

d. $g = 1,12$

$$g_{\text{uur}} = g_{\frac{1}{24}\text{dag}} = g^{\frac{1}{24}} = 1,12^{\frac{1}{24}} = 1,0047$$

$$\text{Groeipercentage} = 100,47 - 100 = 0,47\%$$

VOORBEELD 2

Een andere bacterie verdubbelt in 10 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.

OPLOSSING 2

Je kunt dit op 2 manieren oplossen :

(1) Neem als beginhoeveelheid bijvoorbeeld 100 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$.

Dit geeft :

$$100 \cdot g^{10} = 200$$

$$g^{10} = 2$$

$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1,072 \quad \text{dus } \textit{groeipercentage} = 7,2\%$$

(2) Het verdubbelt in 10 dagen. Dus

$$g_{10 \text{ dagen}} = 2$$

$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1,072 \quad \text{dus } \textit{groeipercentage} = 7,2\%$$

LES 2 : EXPONENTIËLE FORMULE BEPALEN**VOORBEELD 1**

Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 505$ en op $t = 8$ is $N = 150$. Stel de formule op van N .

OPLOSSING 1

Je kunt een stappenplan gebruiken :

- (1) Formule $N = b \cdot g^t$
- (2) Groeifactor berekenen $g_{\dots dagen} = \frac{\text{Achterste}}{\text{Voorste}}$
- (3) Beginwaarde b berekenen door een punt in te vullen
- (4) Formule opschrijven

- (1) Formule $N = b \cdot g^t$
- (2) Groeifactor uitrekenen. Dit kan op twee manieren :

- (2.1) Neem als beginhoeveelheid 505 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$:

$$150 = 505 \cdot g^5 \quad (\text{of los dit op met intersect})$$

$$g^5 = \frac{150}{505} = 0,297..$$

$$g = 0,297^{\frac{1}{5}} = 0,784$$

- (2.2) $g_{5 \text{ jaren}} = \frac{150}{505} = 0,297..$

$$g_{1 \text{ jaar}} = 0,297^{\frac{1}{5}} = 0,784 \quad (\text{methode boek})$$

- (3) beginwaarde uitrekenen

Je weet

$$N = b \cdot 0,748^t$$

Punt (3,505) invullen →

$$505 = b \cdot 0,748^3 \quad (\text{of intersect})$$

$$b = \frac{505}{0,748^3} = 1048$$

- (4) Formule

$$N = 1048 \cdot 0,748^t$$

PARAGRAAF 9.3 : REKENREGELS MET LOGARITMEN

LES 1 : LOGARITMISCHE VERGELIJKINGEN

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 regels zijn :

$$(1) {}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b) \qquad {}^3\log(5) + {}^3\log(x) = {}^3\log(5x)$$

$$(2) {}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right) \qquad {}^2\log(10) - {}^2\log(5) = {}^2\log\left(\frac{10}{5}\right) = 1$$

$$(3) {}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log(a) \qquad {}^3\log(a^5) = 5 \cdot {}^3\log(a)$$

$$(4) {}^g\log(g)^t = t \qquad {}^7\log(7)^5 = 5$$

Er zijn ook nog een aantal regels die handig kunnen zijn :

$$(5) {}^g\log(1) = 0 \qquad {}^7\log(1) = {}^7\log(7^0) = 0$$

$$(6) \log(a) = {}^{10}\log(a) \qquad \log(3) = {}^{10}\log(3)$$

$$(7) {}^g\log(a) = \frac{\log(a)}{\log(g)} \qquad {}^8\log(20) = \frac{\log(20)}{\log(8)}$$

$$(8) {}^{\frac{1}{g}}\log(a) = - {}^g\log(a) \qquad {}^{\frac{1}{3}}\log(x) = - {}^3\log(x)$$

VOORBEELD 1

Bereken exact met de rekenregels

a. ${}^3\log(6) + {}^3\log(12)$

b. ${}^3\log(25) + {}^{\frac{1}{3}}\log(5)$

c. $2 \cdot {}^3\log(6) - {}^3\log(12) =$

OPLOSSING 1

a. ${}^3\log(6) + {}^3\log(12) = {}^3\log(6 \cdot 12) = {}^3\log(72)$

b. ${}^3\log(25) + {}^{\frac{1}{3}}\log(5) = {}^3\log(5^2) - {}^3\log(5) = 2 \cdot {}^3\log(5) - {}^3\log(5) = {}^3\log(5)$

c. $2 \cdot {}^3\log(6) - {}^3\log(12) = {}^3\log(6^2) - {}^3\log(12) = {}^3\log(36) - {}^3\log(12)$

$${}^3\log\left(\frac{36}{12}\right) = {}^3\log(3) = 1 \quad \{ \text{want } 3^1 = 3 \}$$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

a. $2 + {}^4\log(x) = {}^4\log(x) (12 - 3x)$

b. ${}^2\log(x + 5) + {}^2\log(x + 2) = 2$

OPLOSSING 2

a.

$$2 + {}^4\log(x) = {}^4\log(12 - 3x)$$

$${}^4\log(4^2) + {}^4\log(x) = {}^4\log(12 - 3x)$$

$${}^4\log(16x) = {}^4\log(12 - 3x)$$

$$16x = 12 - 3x$$

$$19x = 12$$

$$x = \frac{12}{19}$$

b.

$${}^2\log(x + 5) + {}^2\log(x + 2) = 2$$

$${}^2\log((x + 5) \cdot (x + 2)) = {}^2\log(2^2)$$

$${}^2\log(x^2 + 7x + 10) = {}^2\log(4)$$

$$x^2 + 7x + 10 = 4$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(x + 6) \cdot (x + 1) = 0$$

$$x = -6 \quad \vee \quad x = -1$$

(V.N.)

LES 2 : GRAFIEKEN EN ONGELIJKHEDEN**STAPPENPLAN LOGARITMISCHE ONGELIJKHEDEN**

- | | |
|--|-----|
| (0) Bepaal het domein | |
| (1) Los de vergelijking op | (I) |
| (2) Maak een schets van de twee grafieken. Let op het domein!!!! | (S) |
| (3) Lees de oplossing af uit de schets. | (A) |

VOORBEELD 1

Gegeven $f(x) = {}^4\log(x+2)$ en $g(x) = {}^4\log(5-x)$.

- a. Bepaal de domeinen van f en g .
b. Los op : $f(x) \leq g(x)$

OPLOSSING 1

a. *Domein f* : $x + 2 > 0$
 $x > -2$ (VA : $x = -2$)

Domein g : $5 - x > 0$
 $x < 5$ (VA : $x = 5$)

b. (1) ${}^4\log(x+2) = {}^4\log(5-x).$

$$x+2 = 5-x$$

$$2x = 3$$

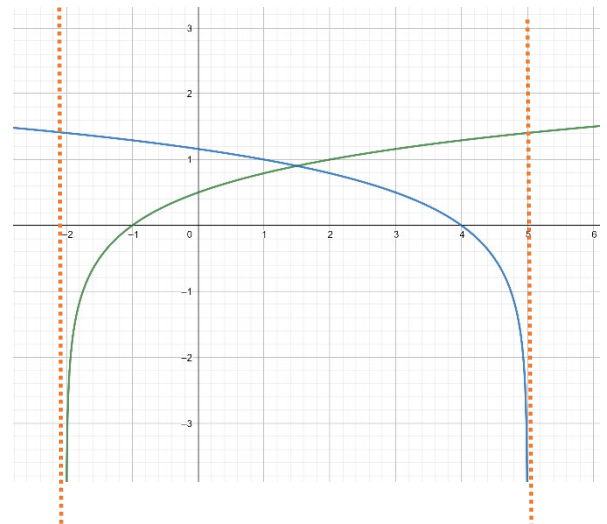
$$x = 1\frac{1}{2} \quad \{ \text{of met de GR en intersect als er geen exact/alg. staat} \}$$

(2) Schets (met knop logbase)

$$Y1 = \log_4(x+2)$$

$$Y2 = \log_4(5-x)$$

(3) $-2 < x \leq 1\frac{1}{2}$



PARAGRAAF 9.4 : FORMULES OMWERKEN

LES 1 : VAN MACHT NAAR LOG EN OMGEKEERD

REKENREGELS LOGARITMEN

De belangrijkste 4 regels zijn :

$$(1) \quad {}^g\log(a) + {}^g\log(b) = {}^g\log(a \cdot b)$$

$$(2) \quad {}^g\log(a) - {}^g\log(b) = {}^g\log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$(3) \quad {}^g\log(a^k) = k \cdot {}^g\log(a)$$

$$(4) \quad {}^g\log(g)^t = t$$

VOORBEELD 1

Schrijf de volgende formules als $\log(y) = at + b$ of als $\log(y) = p + q \cdot \log(x)$

a. $y = 5 \cdot 2^{3t+8}$

b. $y = 10 \cdot x^{2,3}$

OPLOSSING 1

a. $y = 5 \cdot 2^{3t} \cdot 2^8$

$$y = 5 \cdot (2^3)^t \cdot 256$$

$$y = 1280 \cdot 8^t$$

$$\log(y) = \log(1280 \cdot 8^t)$$

$$\log(y) = \log(1280) + \log(8^t)$$

$$\log(y) = \log(1280) + t \cdot \log(8)$$

$$\log(y) = 3,11 + t \cdot 0,90$$

$$\log(y) = 0,90t + 3,11$$

of $\log(y) = \log(5 \cdot 2^{3t+8})$

$$\log(y) = \log(5) + \log(2^{3t+8})$$

$$\log(y) = \log(5) + (3t + 8) \times \log(2)$$

$$\log(y) = 0,69897 + (3t + 8) \times 0,301..$$

$$\log(y) = 0,70 + 0,90t + 2,41$$

$$\log(y) = 0,90t + 3,11$$

b. $y = 10 \cdot x^{2,3}$

$$\log(y) = \log(10 \cdot x^{2,3})$$

$$\log(y) = \log(10) + \log(x^{2,3})$$

$$\log(y) = \log(10) + 2,3 \cdot \log(x)$$

$$\log(y) = 1 + 2,3 \cdot \log(x)$$

VOORBEELD 2

Schrijf de volgende formules om in $y = b \cdot g^t$ of $y = a \cdot x^n$

a. $t = 4 \cdot \log(y) - 10$

b. $\log(y) = 2 + 5 \cdot \log(x)$

OPLOSSING 2

Maak gebruik van de regel : ${}^g\log(g^t) = t$

a. $t = 4 \cdot \log(y) - 10$

$$4\log(y) = t + 10$$

$$\log(y) = 0,25t + 2,5$$

$$\log(y) = \log(10^{0,25t + 2,5})$$

$$y = 10^{0,25t + 2,5}$$

$$y = 10^{0,25t} \cdot 10^{2,5}$$

$$y = 316,23 \cdot (10^{0,25})^t$$

$$y = 316,23 \cdot 1,78^t$$

b. $\log(y) = 2 + 5 \cdot \log(x)$

$$\log(y) = \log(10^2) + \log(x^5)$$

$$\log(y) = \log(10^2 \cdot x^5)$$

$$y = 10^2 \cdot x^5$$

$$y = 100 x^5$$

LES 2 : LOG(B) UITZETTEN TEGEN A**VOORBEELD 1**

In de figuur zie je $\log(N)$ uitgezet tegen t

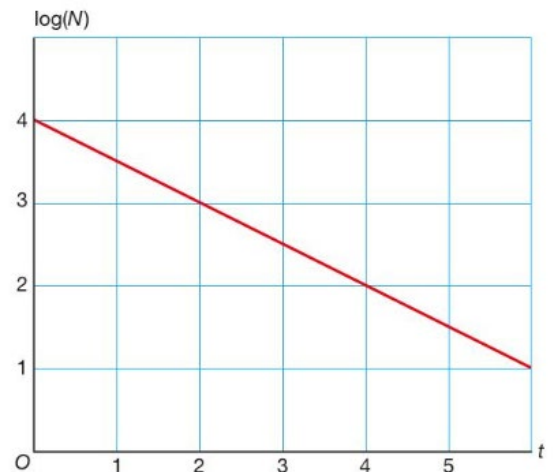
- a. Bereken N bij $t = 4$.

Stel van de lijn de formule op in de vorm:

b. $\log(N) = a \cdot t + b$

c. $N = b \cdot g^t$

d. $t = p \cdot \log(N) + q$

**OPLOSSING 1**

- a. $t = 4 \rightarrow \log(N) = 2$,
Dus $N = 10^2 = 100$

- b. (0,4) en (4,2)
 $\log(N) = at + b$
 $a = \frac{2-4}{4-0} = -0,5$ en $b = 4$
 $\log(N) = -0,5t + 4$

- c. $N = 10^{-0,5t + 4}$
 $N = 10^{-0,5t} \cdot 10^4$
 $N = (10^{-0,5})^t \cdot 10000$
 $N = 10000 \cdot 0,316^t$

- d. $\log(N) = -0,5t + 4$
 $\log(N) - 4 = -0,5t$
 $t = -2\log(N) + 8$